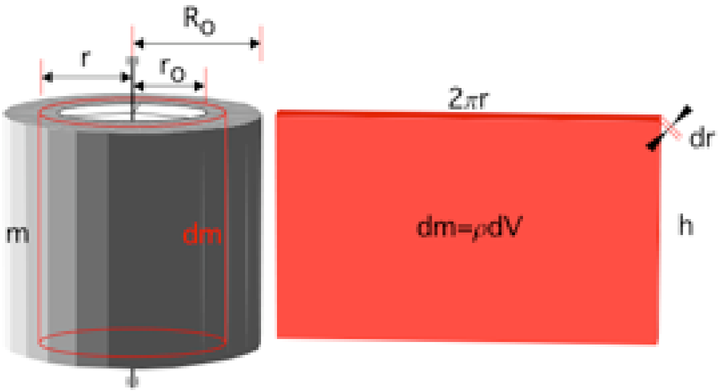
Démonstration du moment d'inertie du cylindre creux

Dr F. Raemy

Le moment d'inertie du cylindre creux est : $I = m \cdot \left(\frac{R_0^2}{2} + \frac{r_0^2}{2}\right)$. Les symboles sont m qui représente la masse totale du cylindre et R_0 le grand rayon, r_0 le petit rayon. La définition du moment d'inertie $I = \int dm \cdot r^2$ fournit le résultat final en consultant l'esquisse suivant :
L'élément de masse dm a la distance r par rapport à l'axe de rotation.



L'élément de masse dm

$$\boxed{dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr}$$

La masse totale m du cylindre creux

$$\boxed{m = \pi\rho h\left(R_0^2 - r_0^2\right)}$$

Le moment d'inertie

$$I = \int_{r_0}^{R_0} r^2 dm = 2\pi\rho h \int_{r_0}^{R_0} r^3 dr = 2\pi\rho h\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_0}^{R_0} = 2\pi\rho h\left[\frac{R_0^4}{4} - \frac{r_0^4}{4}\right] = 2\pi\rho h\left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{r_0^2}{2}\right)\left(\frac{R_0^2}{2} + \frac{r_0^2}{2}\right)$$

$$I = \pi\rho h\left(R_0^2 - r_0^2\right)\left(\frac{R_0^2}{2} + \frac{r_0^2}{2}\right)$$

$$\boxed{I = m \cdot \left(\frac{R_0^2}{2} + \frac{r_0^2}{2}\right)}$$